OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V-a

Soluţii

1.

a) $a = 2015 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2014) = 2015 + 2 \cdot 2014 \cdot 2015 : 2 =$

$= 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015(1+2014) = 2015 \cdot 2015 = 2015^2$

$b = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2015 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2015 – (2 + 4 + ... + 2014) =$

$= 2015 \cdot 2016 : 2 – 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1007) =$

$= 2015 \cdot 1008 – 2 \cdot 1007 \cdot 1008 : 2 = 2015 \cdot 1008 – 1007 \cdot 1008 =$

$= 1008(2015 – 1007) = 1008 \cdot 1008 = 1008^2$

b) $2015 + a = 2015 + 2015^2 = 2015(1 + 2015) = 2015 \cdot 2016$

$4b = 4 \cdot 1008^2 = 2^2 \cdot 1008^2 = (2 \cdot 1008)^2 = 2016^2$

Deoarece $2015 \cdot 2016 < 2016^2 \Rightarrow 2015 + a < 4b$

2.

Observăm că 2a, 6c şi 50 sunt nr. pare ⇒ b este par şi prim ⇒ b = 2.

Atunci avem 2a + 6c = 40 / : 2 şi ⇒ a + 3c = 20.

Pentru a = 2 ⇒ c = 6 nu este prim;

Pentru a = 3 ⇒$c \notin N$;

Pentru a = 5 ⇒ c = 5;

Pentru a = 7 ⇒ c $\notin N$;

Pentru a = 11 ⇒ c = 3;

Pentru a = 13 ⇒$c \notin N$;

Pentru a = 17 $\Rightarrow$c = 1 nu este prim;

Pentru a > 19 şi prim $\Rightarrow c \notin N$.

Deci numerele sunt :a=5, b=2şi c=5; a=11, b=2 şi c=3.

3.

Din condiţia (i) rezultă că elementele mulţimilor X şi Y se găsesc printre elementele mulţimii {1; 2; 3; 4}.

Din (ii) rezultă că $1 \in X$, $1 \in Y$, $2 \in X$, $2 \in Y$.

Din (ii) şi (iv) rezultă că $3 \notin Y$.

Datorită condiţiei (iii) avem şi $3 \notin X$(astfel din $3 \in X$ şi $3 \notin Y$ ar rezulta $3 \in X-Y$, ceea ce contravine condiţiei $X-Y \subset \{1,2,4\}$) .

Deci elementele 1 şi 2 fac parte din ambele mulţimi X şi Y, iar 3 nu aparţine nici lui X şi nici lui Y.

Din (v) avem $4 \notin X$ şi $4 \in Y$.

În concluzie X = {1;2} şi Y = {1; 2; 4}

4.

Determinarea sumei iniţiale : 600 · 5 = 3000 (lei).

Determinarea lungimii efective a traseului : 2700 : 5 = 540 (km)

Determinarea sumei economisite prin renunţarea celor 6 elevi : 3000 – 2700 = 300 (lei)

Determinarea costului pentru un elev : 300 : 6 = 50(lei)

Determinarea numărului de elevi înscrişi iniţial : 3000 : 50 = 60(elevi)